8.4 Návod na laboratórne meranie č.8

Určenie Poissonovej konštanty

Pri adiabatickom deji neprebieha tepelná výmena medzi plynom a okolím, takže podľa prvého termodynamického zákona platí:

$$\Delta U = W$$

Pri adiabatickom stlačení plynu v nádobe sa pôsobením vonkajšej sily koná práca; teplota plynu a jeho vnútorná energia sa zväčšujú. Pri adiabatickom rozpínaní prácu koná plyn; pritom sa teplota plynu a jeho vnútorná energia zmenšujú.

Pre adiabatický dej s ideálnym plynom platí *Poissonov zákon*:

$$pV^{\kappa} = konšt.$$

kde κ je *Poissonova konštanta*, pričom platí: $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$, pričom c_{p} je hmotnostná tepelná kapacita pri konštantnom tlaku a c_{V} je hmotnostná tepelná kapacita pri konštantnom objeme. Poissonova konštanta je vždy väčšia ako 1, pričom závisí od druhu plynu (pre plyn s jednoatómovými molekulami $\kappa = \frac{5}{3}$, s dvojatómovými molekulami $\kappa = \frac{7}{5}$)

Práca vykonaná pri adiabatickom deji:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int p_0 \frac{V_0^{\kappa}}{V^{\kappa}} dV = p_0 V_0^{\kappa} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\kappa}} = p_0 V_0^{\kappa} \left(\frac{V_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right)$$
$$= \frac{p_0 V_0^{\kappa}}{1-\kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa})$$

Plyn v rovnovážnom stave je úplne charakterizovaný zodpovedajúcim počtom tzv. stavových veličín, tlakom p, objemom V a teplotou T. Nakoľko pri zohrievaní plynu sa značne mení jeho tlak i objem, bude od týchto veličín závislá aj tepelná kapacita a hmotnostná tepelná kapacita. Preto pri plynoch poznáme dve tepelné kapacity a teda i dve hmotnostné tepelné kapacity, podľa toho, akým spôsobom zohrievanie plynu uskutočňujeme. Ak zohrievame plyn za stáleho objemu, plyn nekoná žiadnu prácu a celé dodané množstvo tepla sa mení na vnútornú energiu. Ak zohrievame plyn za stáleho tlaku, potom dodané teplo sa mení jednak na vnútornú energiu plynu a tiež aj na prácu, ktorú plyn koná voči vonkajším silám. Dodané množstvo tepla je v tomto prípade pri dosiahnutí rovnakej hodnoty vnútornej energie väčšie, ako v predošlom prípade. Z uvedeného vyplýva, že hmotnostná tepelná kapacita plynu za stáleho tlaku c_p je väčšia ako hmotnostná tepelná kapacita za stáleho objemu c_V. Vnútorná energia sústavy za rovnováhy je vo všeobecnosti funkciou teploty T a objemu V, t. j. U (T, V).

<table>
<tr><td>Dátum merania</td><td>Meno a priezvisko</td><td>Študijný odbor</td><td colspan="2">Hodnotenie</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">Určenie Poissonovej konštanty vzduchu
Clément-Desormesovou metódou</td><td>Teplota</td><td></td></tr>
<tr><td>Tlak</td><td></td></tr>
<tr><td>Vlhkosť</td><td></td></tr>
</table>

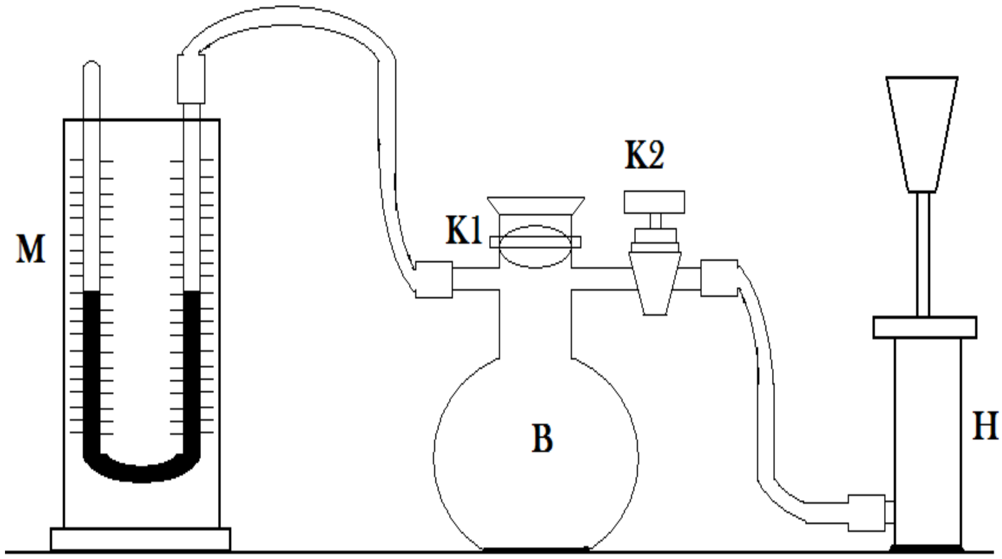
Obrázok 52 Zariadenie na meranie Poissonovej konštanty

- **Teória k meraniu:**

Adiabatický dej je dokonale tepelne izolovaný. Pri konštantnej hmotnosti platí Poissonova rovnica v tvare $pV^{\kappa} = konšt.$ Poissonova konštanta κ je definovaná ako podiel hmotnostných tepelných kapacít pri stálom tlaku a objeme.

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

Hmotnostná tepelná kapacita je definovaná ako podiel množstva tepla, ktoré treba dodať (odobrať) látke s hmotnosťou *m*, aby sa jej teplota zmenila o teplotný interval Δt.



Obrázok 53 Clément-Desormesov prístroj

Na určenie Poissonovej konštanty použijeme Clément – Desormesovu metódu, ktorá je nepriama. Pri tejto metóde máme zariadenie zostavené podľa Obr. 52 alebo schematicky na Obr. 53. Pričom ventily majú svoj špecifický význam. Jeden slúži na vytvorenie pretlaku (ventil K1 a to tým, že je otvorený a druhý uzavretý) v nádobe a druhý (ventil K2) na vyrovnanie tlaku s okolím. Ak uzavrieme ventil (K2), pumpou vytvoríme pretlak v nádobe (druhý ventil bude otvorený). Pretlak vzniknutý v nádobe sa nám ukáže na manometri, z ktorého odčítame hodnoty, z ktorých dostaneme h (výškový rozdiel na manometri). Plyn je charakterizovaný troma stavovými veličinami, v stave pretlaku bude mať plyn v nádobe teplotu T_1, objem V_1 a tlak p_1, pričom p_1 je barometrický tlak. Potom otvoríme ventil (K2), ktorým vyrovnáme tlak. Takže tlak v nádobe sa nám bude rovnať s tlakom okolitého prostredia. Po chvíľke ho opätovne uzavrieme. Tlak sa zväčší o hodnotu $p_2 = b + h_2\rho g$. Medzi tu opísanými stavmi prebehol izotermický dej a preto môžeme napísať tento vzťah $p_1V_1 = p_2V_2$. Pri krátkom otvorení ventilu K2 prebehol adiabatický dej, čiže platí:

$$(b + h\rho g)V_1^{\kappa} = bV_2^{\kappa}$$

Clément-Desormesov prístroj (Obr. 32) pozostáva z otvoreného kvapalinového manometra M, sklenej nádoby B. Nádoba B je kohútikom K2 spojená s pumpou H a pomocou K1 s okolitým vzduchom a je priamo spojená s manometrom M.

Vzduch pred meraním má v nádobe atmosférický tlak *b*. Ak zvýšime pumpou tlak v nádobe na hodnotu p_1

$$p_1 = b + h_1 \rho g$$

kde h_1 je rozdiel výšok hladín destilovanej vody v manometri. Stav plynu v nádobe je potom určený tlakom p_1 teplotou T_1. Ak otvoríme na chvíľu kohútik K_1 nastane adiabatická expanzia, tlaky sa vyrovnajú, teplota v nádobe klesne na hodnotu $T_2 < T_1$. Po uzavretí kohútika K_1 teplota T_2 začne stúpať až sa vyrovná s teplotou okolia T_1 a tým tlak v nádobe stúpne na hodnotu

$$p_2 = b + h_2 \rho g$$

kde h_2 je rozdiel výšok hladín destilovanej vody v manometri po prevedení adiabatickej expanzie a po vyrovnaní teplôt. Pre tento dej platí Poissonova rovnica v tvare:

$$p_1 V_1^\kappa = b V_2^\kappa$$

kde V_1 a V_2 sú objemy vzduchu pred a po adiabatickej expanzii. Teploty plynu sa vyrovnávajú. Toto vyrovnanie možno považovať za dej izotermický a teda platí:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

z rovníc $p_1 V_1^\kappa = b V_2^\kappa$ a $p_1 V_1 = p_2 V_2$ vyplýva

$$\frac{p_1}{b} = (\frac{p_1}{p_2})^\kappa$$

odtiaľ

$$\kappa = \frac{\log p_1 - \log b}{\log p_1 - \log p_2} = \frac{\log \frac{p_1}{b}}{\log \frac{p_1}{p_2}}$$

Ak rozvinieme po dosadení vzťah $\frac{p_1}{b} = (\frac{p_1}{p_2})^\kappa$

$$\frac{b + h_1 \rho g}{b} = (\frac{b + h_1 \rho g}{b + h_2 \rho g})^\kappa$$

$$1 + \frac{h_1 \rho g}{b} = [\frac{(b + h_1 \rho g).(b - h_2 \rho g)}{b^2 - h_2^2 \rho^2 g^2}]^\kappa = [\frac{1}{b^2} \frac{b^2 - b h_2 \rho g + b h_1 \rho g - h_1 h_2 \rho^2 g^2}{1 - \frac{h_2^2 \rho^2 g^2}{b^2}}]^\kappa$$
$$= (1 - \frac{h_2 \rho g}{b} + \frac{h_1 \rho g}{b})^\kappa \doteq 1 - \frac{\kappa h_2 \rho g}{b} + \frac{\kappa h_1 \rho g}{b}$$

$$h_1 \doteq \kappa h_1 - \kappa h_2$$

Pre Poissonovu konštantu potom dostaneme:

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

Za predpokladu, že platí: $\frac{h_1}{b} \ll 1$ a $\frac{h_2}{b} \ll 1$

➢ **Úloha:**

1. Vypočítajte Poissonovu konštantu podľa presného vzťahu $\kappa = \frac{\log p_1 - \log b}{\log p_1 - \log p_2} = \frac{\log \frac{p_1}{b}}{\log \frac{p_1}{p_2}}$ a určite krajnú absolútnu chybu výsledku.
2. Vypočítajte Poissonovu konštantu podľa približného vzťahu $\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2}$ a určite absolútnu pravdepodobnú chybu výsledku.
3. Výsledky porovnajte s hodnotami Poissonovej konštanty vzduchu v tabuľkách.

➢ **Pomôcky:** Clément – Desormesov prístroj, destilovaná voda, odmerný valec, alebo striekačka.

➢ **Postup:**

1. Zostavenie prístroja je zrejmé z Obr. 52 a Obr. 53.
2. Uzavrieme kohútik K1 a pumpou zvýšime tlak na p_1, odčítame výšky hladín v manometri po vyrovnaní teplôt a ustálení. Určíme rozdiel h_1 a zapíšeme do tabuľky.
3. Otvoríme kohútik K1 na okamih (pomaly ho otáčame o 180°). Po prebehnutí adiabatickej expanzie a zvýšení tlaku na p_2 odčítame na manometri výšky hladín a určíme rozdiel h_2, ktorý zapíšeme do tabuľky.
4. Otvoríme znovu kohútik K2 a necháme vyrovnať tlak s vonkajším barometrickým tlakom. Potom celé meranie zopakujeme ešte 9-krát.
5. Zistíme okolitý atmosferický tlak b v Pascaloch. Vypočítame tlaky p_1 a p_2 podľa vzťahov a výsledky zapíšeme do tabuľky:

$$p_1 = b + h_1 \rho g \quad \text{a} \quad p_2 = b + h_2 \rho g$$

6. Z jednotlivých dvojíc tlakov vypočítame hodnotu Poissonovej konštanty κ podľa vzťahu:

$$\kappa = \frac{\log p_1 - \log b}{\log p_1 - \log p_2} = \frac{\log \frac{p_1}{b}}{\log \frac{p_1}{p_2}}$$

   Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky a vypočítame aritmetický priemer pre Poissonovu konštantu. Aritmetický priemer ohodnotíme krajnou absolútnou chybou aritmetického priemeru.
7. Z jednotlivých dvojíc výšok hladín v manometrickej trubici potom vypočítame približnú hodnotu Poissonovej konštanty κ podľa vzťahu:

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

   Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky a z výsledkov vypočítame príslušný aritmetický priemer, ktorý následne ohodnotíme absolútnou pravdepodobnou chybou aritmetického priemeru.
8. Zistíme Poissonovu konštantu κ pre vzduch v tabuľkách a porovnáme jej hodnotu s výsledkom merania Clément – Desormesovou metódou.

- **Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:**

n	h_1 (mm)	h_2 (mm)	$\kappa_{približne}$	$\Delta_{+}(\kappa_{prib.})$	$\Delta_{-}(\kappa_{prib.})$
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
			$\bar{\kappa}_{pribl}$ =	$\sum \Delta_{+}$ =	$\sum \Delta_{-}$ =

N	p_1 (Pa)	p_2 (Pa)	κ_{presne}	$\Delta_{+}(\kappa_{presn.})$	$\Delta_{-}(\kappa_{presn.})$
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
			$\bar{\kappa}_{presne}$ =	$\sum \Delta_{+}$ =	$\sum \Delta_{-}$ =

- **Spracovanie nameraných hodnôt:**

Výpočet tlakov (vzorový výpočet pre ... riadok):

$p_1 = b + h_1 \rho g$ ....

....

....

$p_2 = b + h_2 \rho g$..

....

....

Vypočítajte Poissonovu konštantu podľa presného vzťahu (vzorový výpočet pre ... riadok):

$\kappa = \frac{\log p_1 - \log b}{\log p_1 - \log p_2} = \frac{\log \frac{p_1}{b}}{\log \frac{p_1}{p_2}}$ ....

....

....

Výpočet Poissonovej konštanty podľa približného vzťahu (vzorový výpočet pre ... riadok):

$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$ ....

....

....

Výpočet aritmetického priemeru pre presnú a približnú hodnotu Poissonovej konštanty:

$\overline{\kappa_{pribl}} = \frac{\sum \kappa_i}{n}$ ....

$\bar{\kappa} = \frac{\sum \kappa_i}{n}$..

....

Výpočet odchýliek od aritmetického priemeru pre presnú a približnú hodnotu Poissonovej konštanty (vzorové výpočty pre .... a .... riadok):

$\Delta_+ = \bar{\kappa} - \kappa_i$ ....

....

$\Delta_- = \bar{\kappa} - \kappa_i$ ....

....

Výpočet absolútnej pravdepodobnej chyby aritmetického priemeru pre približnú hodnotu Poissonovej konštanty:

$\vartheta\left(\kappa_{prib.}\right) = \pm \frac{5}{3} \frac{\sum \Delta_+(\kappa_{prib.})}{n\sqrt{n-1}} = \pm \frac{\sum \Delta_+(\kappa_{prib.})}{18}$ ....

....

....

Výpočet absolútnej pravdepodobnej chyby aritmetického priemeru pre presnú hodnotu Poissonovej konštanty:

$\bar{\vartheta}\left(\kappa_{presn.}\right) = \pm\frac{5}{3}\frac{\sum\Delta_{+}(\kappa_{presn.})}{n\sqrt{n-1}} = \pm\frac{\sum\Delta_{+}(\kappa_{presn.})}{18}$ ....

....

....

Absolútna krajná chyba aritmetického priemeru:

$\bar{\kappa}\left(\kappa_{presn.}\right) = \frac{9}{2}\bar{\vartheta}\left(\kappa_{presn.}\right) = \pm\frac{\sum\Delta_{+}(\kappa_{presn.})}{4}$ ....

....

....

- **Záver:**

1. Zapíšte výsledok merania v tvare skutočnej hodnoty, pričom ohodnoťe aritmetický priemer pre približnú hodnotu Poissonovej konštanty pravdepodobnou absolútnou chybou. Aritmetický priemer pre presnú hodnotu $\bar{\kappa}_{presn.}$ ohodnoťe krajnou absolútnou chybou aritmetického priemeru.

....

....

....

2. Porovnajte hodnotu Poissonovej konštanty vzduchu zistenej meraním Clément – Desormesovou metódou s hodnotou uvedenou vo fyzikálno-chemických tabuľkách.

....

....

....

3. Vymenujte a stručne charakterizujte zdroje chýb pri meraní Clément-Desormesovou metódou z pohľadu pozorovateľa, meracej metódy a použitej meracej aparatúry.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....