

7 Návodý na laboratórne merania

(1. časť)

Spracovanie nameraných hodnôt

Keďže schopnosť realizovať experimenty a merať charakteristiky fyzikálnych veličín je neoddeliteľnou súčasťou komplexného fyzikálneho vzdelávania, v rámci tejto kapitoly je prezentovaný rámcový spôsob spracovania nameraných hodnôt fyzikálnych veličín, spolu s návodom na spracovanie protokolu z laboratórneho merania. Detailný spôsob spracovania nameraných a vypočítaných hodnôt je prezentovaný v rámci iných publikácií.

Výpočet aritmetického priemeru a odchýlok od aritmetického priemeru

- *Výpočet aritmetického priemeru*

Nech $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ je n nameraných hodnôt fyzikálnej veličiny, kde x_i je i -tá nameraná hodnota a n je počet meraní, potom *aritmetický priemer* je definovaný ako podiel súčtu všetkých nameraných hodnôt a celkového počtu meraní.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- ✓ *Výpočet odchýlky od aritmetického priemeru*

Nech $\bar{x}$ - je aritmetický priemer a nech x_i je i -tá nameraná hodnota fyzikálnej veličiny. Odchýlka od aritmetického priemeru je definovaná ako rozdiel hodnoty aritmetického priemeru a i -tej nameranej hodnoty nasledovným vzťahom:

$$\Delta_i = \bar{x} - x_i$$

Ak i -tá odchýlka od aritmetického priemeru Δ_i je číslo kladné alebo rovné nule, tak ju zaradíme medzi kladné odchýlky od aritmetického priemeru tzn. v tabuľke nameraných a vypočítaných hodnôt do stĺpca označeného Δ_+ . Ak i -tá odchýlka od aritmetického priemeru Δ_i je číslo záporné, tak ju zaradíme medzi záporné odchýlky od aritmetického priemeru tzn. v tabuľke nameraných a vypočítaných hodnôt do stĺpca označeného Δ_- . Výpočet odchýlok od aritmetického priemeru je možné skontrolovať tak, že vypočítame *súčet všetkých kladných odchýlok* od aritmetického priemeru $\sum \Delta_+$, ďalej vypočítame *súčet všetkých záporných odchýlok* od aritmetického priemeru $\sum \Delta_-$. Ak sme počítali správne získame dve navzájom opačné čísla. Iný spôsob kontroly výsledku vyjadruje nasledovný vzťah:

$$\sum \Delta_+ + \sum \Delta_- = 0$$

Ak bol výpočet správny, získame dve navzájom opačné čísla. Iný spôsob kontroly výsledku vyjadruje vyššie uvedený vzťah.

Výpočet chýb merania

Meranie fyzikálnych veličín rozdeľujeme do dvoch skupín. Prvú skupinu tvoria tzv. priame merania, kedy zo stupnice meracieho prístroja vieme odčítať hodnotu meranej fyzikálnej veličiny. Príkladom priameho merania je meranie teploty teplomerom, meranie hustoty kvapalín hustomerom, meranie elektrického napätia voltmetrom atď. Druhú skupinu tvoria tzv. nepriame merania, pri ktorých hľadanú fyzikálnu veličinu získame využitím definičného vzťahu, kde fyzikálne veličiny vystupujúce vo vzťahu zistíme priamym meraním a následným dosadením ich hodnôt do definičného vzťahu, pomocou ktorého získame hodnotu hľadanej fyzikálnej veličiny.

Podobne ako merania fyzikálnych veličín delíme na priame a nepriame merania aj chyby meraní delíme na chyby priamych a chyby nepriamych meraní. V tejto kapitole sa venujeme problematike *výpočtu chýb priamych meraní*.

• Absolútne chyby priamych meraní

Predtým ako začneme s výpočtom chýb merania je potrebné vyplniť v tabuľke nameraných a vypočítaných hodnôt riadok súm, ktorý obsahuje súčty jednotlivých hodnôt v stĺpcoch. Súčty z riadka súm nám značne uľahčia výpočet jednotlivých chýb merania.

a) Stredná chyba aritmetického priemeru $\bar{\delta}(x)$ sa vypočíta podľa vzťah

$$\bar{\delta}(x) = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}},$$

Kde $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ - je súčet všetkých štvorcov i -tých odchýliek od aritmetického priemeru a n - je počet meraní.

b) Pravdepodobná chyba aritmetického priemeru $\bar{g}(x) = \pm \frac{2}{3} \bar{\delta}(x)$ po dosadení vzťahu pre strednú chybu aritmetického priemeru získame pre pravdepodobnú chybu aritmetického priemeru vzťah:

$$\bar{g}(x) = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}}.$$

Ak je počet meraní relatívne nízky napríklad 2,3,...10,...30, tak je výhodnejšie pri výpočte pravdepodobnej chyby aritmetického priemeru $\bar{g}(x)$ používať nasledovný vzťah:

$$\bar{g}(x) = \pm \frac{5 \sum \Delta_i}{3n\sqrt{n-1}}.$$

Predchádzajúci vzťah je z praktických dôvodov výhodné upraviť pre počet meraní $n=10$ nasledovne:

$$\bar{g}(x) = \pm \frac{5 \sum \Delta_+}{3.10 \sqrt{10-1}} = \pm \frac{\sum \Delta_+}{18}$$

- c) Krajná chyba aritmetického priemeru sa vypočíta z pravdepodobnej chyby aritmetického priemeru dosadením do vzťahu:

$$\bar{\kappa}(x) = \pm \frac{9}{2} \bar{g}(x)$$

• *Relatívne chyby priamych meraní*

Ku každej absolútnej chybe existuje chyba relatívna, ktorá môže byť uvedená ako bezrozmerné číslo, alebo ju uvádzame v %. Vo všeobecnosti je relatívna chyba definovaná ako podiel absolútnej chyby a aritmetického priemeru, vtedy je výsledok bezrozmerné číslo, ak vynásobíme predtým spomínaný podiel 100, tak získame výsledok v %. Pre úplnosť uvádzame vzťahy pre výpočet jednotlivých relatívnych chýb.

- a) Stredná relatívna chyba a stredná relatívna chyba v %:

$$\bar{\delta}_r(x) = \frac{\bar{\delta}(x)}{\bar{x}}; \text{výsledok je bezrozmerné číslo,}$$

$$\bar{\delta}_{r\%}(x) = \frac{\bar{\delta}(x)}{\bar{x}} \cdot 100 \% ; \text{výsledok je v \%}$$

- b) Pravdepodobná relatívna chyba a pravdepodobná relatívna chyba v %:

$$\bar{g}_r(x) = \frac{\bar{g}(x)}{\bar{x}}; \text{výsledok je bezrozmerné číslo,}$$

$$\bar{g}_{r\%}(x) = \frac{\bar{g}(x)}{\bar{x}} \cdot 100 \% ; \text{výsledok je v \%}$$

- c) Krajná relatívna chyba a krajná relatívna chyba v %:

$$\bar{\kappa}_r(x) = \frac{\bar{\kappa}(x)}{\bar{x}}; \text{výsledok je bezrozmerné číslo,}$$

$$\bar{\kappa}_{r\%}(x) = \frac{\bar{\kappa}(x)}{\bar{x}} \cdot 100 \% ; \text{výsledok je v \%}$$

✓ *Zápis výsledku merania*

Výsledok merania zapisujeme v tvare tzv. *skutočnej hodnoty*. Predtým ako zapíšeme výsledok merania je potrebné správne zaokrúhliť aritmetický priemer a chybu merania. Pre zaokrúhľovanie platia nasledovné pravidlá:

- *Najskôr sa zaokrúhľuje chyba merania* na dve platné t.j. prvé dve nenulové desatinné miesta a číslica na druhom platnom desatinnom mieste sa zaokrúhli podľa toho, čo za ňou nasleduje.

- Po zaokrúhlení chyby merania sa *zaokrúhľuje aritmetický priemer*. Platí pravidlo, že aritmetický priemer musí mať toľko desatinných miest, koľko má chyba merania a číslicu na poslednom mieste zaokrúhľujeme podľa toho, čo za ňou nasleduje.
- Ak aritmetický priemer nemá potrebný počet desatinných miest, tak namiesto chýbajúcich desatinných miest napíšeme 0.

Spracovanie protokolu z laboratórneho merania

V rámci laboratórneho merania študent zhotoví záznam o meraní vo forme pracovného listu. Na pracovnom liste a potom aj na protokole z laboratórneho merania musí byť uvedená nasledovná identifikačná tabuľka:

Poradové číslo úlohy		Názov laboratórnej úlohy	
Meno študenta	a priezvisko		
Dátum merania		Dátum odovzdania	
Laboratórne podmienky			
Teplota vzduchu	Tlak vzduchu		Relatívna vlhkosť vzduchu

Na pracovný list znázorníme tabuľku pre namerané a vypočítané hodnoty. Pracovný list zároveň obsahuje pomocné výpočty a poznámky k priebehu merania. Pracovný list má neformálnu úpravu a je bezprostredným záznamom priebehu merania. Po zmeraní laboratórnej úlohy je pracovný list študentovi podpísaný vyučujúcim. Pracovný list je zároveň aj dokladom, že študent absolvoval laboratórne meranie.

Protokol z laboratórneho merania predstavuje oficiálny záznam o laboratórnom meraní a preto jeho úprava musí byť formálne správna a študent je povinný dodržiavať aktuálnu STN. Na prvú stranu protokolu študent vyplní vyššie uvedenú identifikačnú tabuľku a za tabuľkou pokračuje vo vypracovávaní protokolu z laboratórneho merania nasledovnými bodmi:

- *Pomôcky:* uvádzame kompletný zoznam prístrojov, pomôcok a zariadení spolu s typovým označením meracieho prístroja.
- *Teoretický úvod:* V časti – Návod na laboratórne cvičenia nájdete pre každú laboratórnu úlohu prehľad základných teoretických pojmov, popis fyzikálnych javov, definičných vzťahov a zákonov.
- *Obrázok, schéma zapojenia, bloková schéma, fotografia...* Do protokolu z laboratórneho merania kreslíme obrázok, ak bol uvedený v príslušnom návode na laboratórne meranie. Ak v návode obrázok nefiguruje v protokole nemusí obrázok figurovať, ale študent môže zakresliť usporiadanie meracieho pracoviska, prípadne pomocou samostatne nakresleného obrázku vysvetliť princíp merania resp. odčítania z meracej aparatury. Pri kreslení môže študent použiť fotografiu usporiadania meracieho pracoviska, ktorá môže značne prácu študentovi značne uľahčiť.

- *Postup merania:* Uvádza sa v bodoch a mal by čo najpresnejšie vystihnúť metodiku merania. Postup je správny vtedy, ak po jeho prečítaní vie ktorýkoľvek experimentátor postup aplikovať tak, že dosiahne požadovaný výsledok.
- *Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:* Sú jednou z najvýznamnejších častí protokolu a preto im venujeme náležitú pozornosť. Vo všeobecnosti tabuľku kreslíme vtedy, ak meriame viac ako jednu fyzikálnu veličinu a vždy vtedy, keď fyzikálnu veličinu meriame viackrát. Ak hodnoty fyzikálnej veličiny zisťujeme priamym meraním, tak má tabuľka spravidla nasledovnú formu:

	meraná fyzikálna veličina	kladné odchýlky od AP	záporné odchýlky od AP	štvorec i-tej odchýlky
Číslo merania	x , jednotka	Δ_+ , jednotka	Δ_- , jednotka	Δ_i^2 , jednotka
1.				
2.				
⋮				
n.				
Σ	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\Sigma \Delta_+$	$\Sigma \Delta_-$	$\Sigma \Delta_i^2$

riadok súm
 súčet všetkých nameraných hodnôt
 súčet všetkých kladných odchýliek od AP
 súčet všetkých záporných odchýliek od AP
 súčet všetkých štvorcov i-tých odchýliek od AP

- *Príklad výpočtu:* V príklade výpočtu uvádzame vzorový výpočet hodnôt pre jeden vybraný riadok tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt (riadok, pre ktorý uvádzame výpočet je potrebné označiť). V rámci príkladu výpočtu uvádzame:
 - výpočet fyzikálnych veličín pomocou definičných vzťahov,
 - výpočet aritmetického priemeru,
 - výpočet chýb merania (najčastejšie sa počíta pravdepodobná chyba aritmetického priemeru a k nej sa vypočíta pravdepodobná chyba aritmetického priemeru v %)
 - do príkladu výpočtu sa neuvádza výpočet odchýliek od aritmetického priemeru.
- *Graf:* Graf vypracovávame na milimetrový papier, alebo je možné realizovať graf pomocou príslušného softvéru a následne vytlačiť, ale musia byť dodržané nasledovné náležitosti:

Graf nazveme podľa toho, ktorá fyzikálna veličina figuruje ako závislá (jej hodnoty vynášame na os y-ovú) a nezávislá premenná (jej hodnoty vynášame na os x-ovú). Graf má potom podľa predpisu funkčnej závislosti $y = f(x)$ všeobecný názov: Závislosť y od x. Napríklad, ak sú na osi x-ovej vynesené hodnoty teploty t a na osi y-ovej vynesené hodnoty elektrického napätia U , tak grafickú závislosť nazveme nasledovne: *Závislosť elektrického napätia od teploty*. Niektoré grafické závislosti

fyzikálnych veličín však majú aj špeciálne pomenovania napríklad: *voltampérová charakteristika*, *kalibračná krivka* a pod. Vtedy používame ako názov grafickej závislosti uvedené špeciálne pomenovania.

Ďalším krokom pri kreslení grafickej závislosti, je zvolenie začiatku, nakreslenie číselných osí a zvolenie príslušnej mierky. Mierku volíme tak, aby grafická závislosť bola rozmiestnená na celej ploche vymedzenej číselnými osami. Pozor prvá hodnota na príslušnej osi nemusí byť nula. Ak napríklad nami zmerané hodnoty teploty sú z intervalu $(20 - 70)^{\circ}\text{C}$, potom na teplotnej osi môžeme za začiatok zvoliť hodnotu 20°C .

Pri manuálnom kreslení grafickej závislosti na milimetrový papier musíme dodržiavať princíp rovnomerného delenia číselnej osi. Nie je teda vhodné nanášať na príslušnú os pomocné hodnoty, ktoré spôsobia porušenie princípu rovnomerného delenia číselnej osi. Ak realizujeme grafickú závislosť na počítači, tak príslušný softvér optimalizuje delenie číselnej osi tak, aby bola dodržaný princíp rovnomerného delenia osi.

Do pripraveného grafu vynášame potom jednotlivé namerané alebo vypočítané hodnoty. Pri nanášaní hodnôt dodržiujeme zvolenú mierku. Pozor v grafe nekreslíme pomocné čiary.

Po vynesení všetkých hodnôt je potrebné body spojiť príslušnou čiarou, ktorá bude grafickým znázornením príslušnej závislosti medzi fyzikálnymi veličinami. Vo všeobecnosti môžu nastať dva prípady. Grafická závislosť je lineárna, vtedy grafickým znázornením závislosti bude priamka. Ak grafická závislosť nie je lineárna, tak bude grafickým znázornením príslušná krivka, ktorej tvar zodpovedá príslušnému typu grafickej závislosti známemu čitateľovi z matematiky (napríklad grafická závislosť môže mať tvar polynomickej funkcie, exponenciálnej, logaritmickej funkcie a pod.) Ak kreslíme grafickú závislosť na milimetrový papier manuálne, tak používame pravítko alebo krivítko a rešpektujeme aj príslušný rozptyl nameraných hodnôt. Príslušnú geometrickú čiaru potom vedíme množinou bodov tak, že počet bodov pod čiarou sa rovná počtu bodov nad čiarou. Ak by sme použili pri kreslení grafickej závislosti softvér, tak by tento určil presnú polohu čiary reprezentujúcej grafickú závislosť pomocou metódy najmenších štvorcov.

Vynesenie chýb merania do grafickej závislosti. Skôr ako vynesieme do grafu chyby merania, musíme vyniesť do grafu hodnoty, ktoré reprezentujú príslušné aritmetické priemery. Potom cez tieto body vedíme úsečky rovnobežne s osou y-ovou, ktorých dĺžka zodpovedá príslušnej chybe merania. Musíme však mať na zreteli, že chyby má znamienko $\pm$ tzn. že od bodu znázorňujúceho aritmetický priemer nanášame hodnotu chyby merania v kladnom i zápornom smere číselnej osi.

- **Záver:** Záver predstavuje súvislý text, ktorý má minimálny rozsah pol strany formátu A4 cca 10 riadkov. Do záveru píšeme:
- a) zápis výsledkov merania v tvare skutočnej hodnoty meranej fyzikálnej veličiny,
 - b) porovnanie získaných výsledkov z tabuľkovými, alebo z literatúry známymi hodnotami,
 - c) popíšeme presnosť merania z pohľadu použitej meracej metódy, meracích prístrojov a zariadení sa tiež z pohľadu pozorovateľa,
 - d) identifikujeme možné zdroje nepresností,

- e) zhodnotíme celkovo priebeh merania (Pozor do záveru nepíšeme postup merania!),
- f) ak je súčasťou protokolu z laboratórneho merania graf, tak zhodnotíme typ grafickej závislosti (Závislosť môže byť lineárna alebo nelineárna, ak je grafická závislosť nelineárna, tak je potrebné uviesť typ grafickej závislosti).