

7.3 Návod na laboratórne meranie č.3

Meranie gravitačného zrýchlenia

➤ Tiažová a gravitačná sila, gravitačné zrýchlenie – teoretická časť

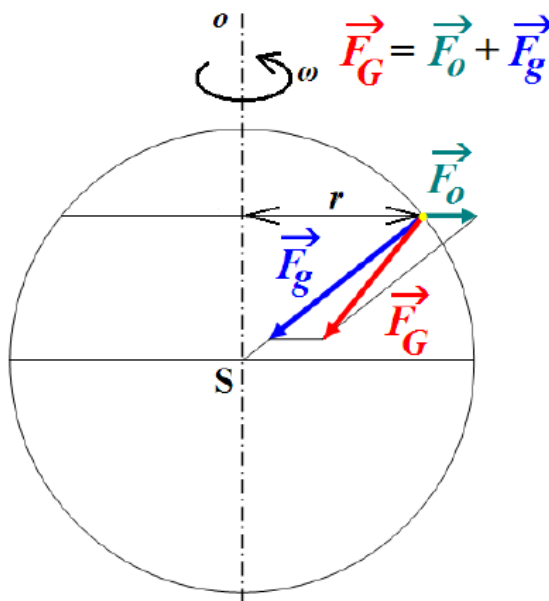
Na teleso s hmotnosťou m , ktoré je na povrchu Zeme, pôsobia 2 sily, gravitačná sila $\vec{F}_g$, ktorá smeruje do stredu Zeme a jej veľkosť podľa Newtonovho gravitačného zákona, môžeme vypočítať pomocou vzťahu:

$$|\vec{F}_g| = F_g = \kappa \frac{m M_z}{r^2}$$

Druhou silou je odstredivá zotrvačná sila $\vec{F}_o$, jej vektor smeruje kolmo na os otáčania a vypočítame ju podľa vzťahu:

$$|\vec{F}_o| = F_o = m r \omega^2$$

Odstredivá sila pôsobí na teleso v dôsledku toho, že sa spolu so Zemou otáča okolo jej osi uhlovou rýchlosťou ω , m je hmotnosť telesa, r je vzdialenosť telesa od osi otáčania. Veľkosť tejto sily sa mení so zemepisnou šírkou polohy telesa na povrchu Zeme, pretože s ňou sa mení r .



Obrázok 50 Znáznornenie tiažovej a gravitačnej sily (o skole.sk, 2019)

Tiažová sila $\vec{F}_G$ je výsledná sila, ktorá pôsobí na teleso v neinerciálnej sústave pevne spojenej so Zemou, je vektorovým súčtom zotrvačnej odstredivovej a gravitačnej sily (Obr. 50).

$$\vec{F}_G = \vec{F}_o + \vec{F}_g$$

Tiažová sila $\vec{F}_G$ má smer zvisle nadol. Pričom za zvislý považujeme smer napnutej nite, na ktorej je zavesené závažie v pokoji. Pôsobisko tiažovej sily nazývame ťažisko telesa.

$$\vec{F}_G = m \vec{g}$$

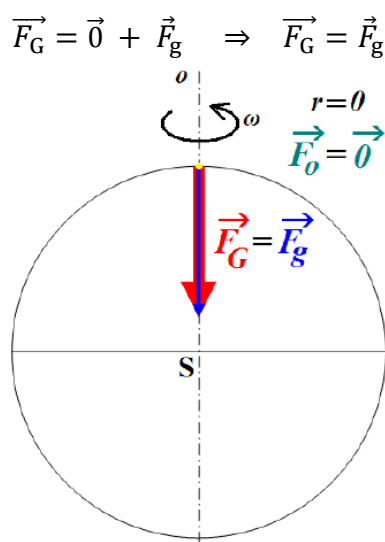
Pôsobením tiažovej sily koná teleso voľne pustené na Zem vo vákuu voľný pád - rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením $\vec{g}$, toto zrýchlenie sa nazýva tiažové zrýchlenie. Tiažové zrýchlenie má v každom mieste smer tiažovej sily $\vec{F}_G$ teda smer zvisle nadol. Veľkosť tiažovej sily sa vypočíta podľa vzťahu:

$$|\vec{F}_G| = F_G = m g$$

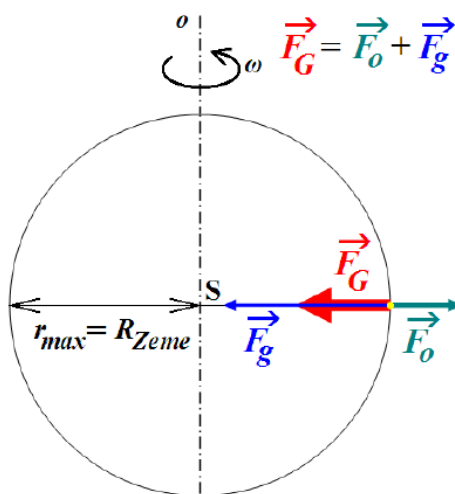
Keďže vektor tiažovej sily je súčtom vektora odstredivej sily a vektora gravitačnej sily, tak smer a veľkosť $\vec{F}_G$ závisí od zemepisnej šírky.

➤ Tiažová sila na póloch

Na póloch je $\vec{F}_o = \vec{0}$, pretože na póloch je $r = 0$ a $F_o = m r \omega^2$. Z uvedených dôvodov je $\vec{F}_G$ najväčšia na póloch a smeruje do stredu Zeme (Obr. 51), potom pre tiažovú silu na póloch platí:



Obrázok 51 Znázornenie tiažovej sily na póloch (oskole.sk, 2019)



Obrázok 52 Znázornenie tiažovej sily na rovníku

➤ Tiažová sila na rovníku

Na rovníku je odstredivá sila $\vec{F}_0$ najväčšia, pretože na póloch nadobúda r maximálnu hodnotu. Sily $\vec{F}_0$ a $\vec{F}_g$ majú na rovníku opačný smer. Veľkosť sily $\vec{F}_G$ sa rovná rozdielu veľkostí síl $\vec{F}_0$ a $\vec{F}_g$. $\vec{F}_G$ je teda na rovníku minimálna a smeruje do stredu Zeme (Obr. 52).

Predtým prezentované teoretické poznatky možno matematicky vyjadriť nasledovne:

$$F_{G_{\text{pól}}} = m g_{\text{pól}}$$

$$F_{G_{\text{rovník}}} = m g_{\text{rovník}}$$

$$F_{G_{\text{pól}}} > F_{G_{\text{rovník}}}$$

$$m g_{\text{pól}} > m g_{\text{rovník}}$$

$$g_{\text{pól}} > g_{\text{rovník}}$$

- ✓ Veľkosť tiažového zrýchlenia sa smerom od pólův k rovníku znižuje.
- ✓ Tiažové zrýchlenie na póloch je $g_{\text{pól}} = 9,833 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- ✓ Tiažové zrýchlenie na rovníku je $g_{\text{rovník}} = 9,780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- ✓ V našich zemepisných šírkach má tiažové zrýchlenie hodnotu približne $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- ✓ Na meteorologické účely sa uvádza normálové tiažové zrýchlenie $g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- ✓ Pre tiažovú silu na póloch platí: $F_G = F_g$
- ✓ Pre všetky ostatné miesta na Zemi platí: $F_G < F_g$.

Vo všeobecnosti sa tiažová sila mení aj v závislosti od nadmorskej výšky, ale v blízkom okolí Zeme, niekoľko kilometrov nad jej povrchom, môžeme považovať jej veľkosť za stálu. Tiažovú silu, ktorou pôsobí Zem na teleso, znázorňujeme v ťažisku telesa. Bežne sa hovorí o pôsobení gravitačnej sily medzi telesami. Termín gravitačná sila sa používa, ak napr. hovoríme o príťažlivej sile medzi Zemou a Mesiacom či Slnkom, príťažlivej sile medzi planétami. Nie je to však správne označenie pre silu, ktorou pôsobí Zem na telesá v jej okolí. Zem totiž koná otáčavý pohyb okolo svojej osi a to ovplyvňuje výslednú silu pôsobiacu na telesá v jej okolí.

➤ Tiažové zrýchlenie

Tiažové zrýchlenie je dôsledkom silového pôsobenia tiažového poľa Zeme na hmotné teleso. Zem ho udelí každému voľne padajúcemu telesu nachádzajúcemu sa v jej tiažovom poli. Vektor tiažového zrýchlenia $\vec{g}$ vzniká zložením vektora gravitačného zrýchlenia $\vec{g}_0$, ktorý má na celej Zemi rovnakú veľkosť (ak zanedbáme nadmorskú výšku) s vektorom odstredivého zrýchlenia $\vec{a}$, ktorý je dôsledok rotácie Zeme okolo vlastnej osi. Zrejme veľkosť tiažového zrýchlenia v mieste s nadmorskou výškou h môžeme určiť zo vzťahu:

$$g_0 = \frac{GM_Z}{(R_Z + h)^2}$$

kde G je gravitačná konštanta, M_Z hmotnosť Zeme a R_Z polomer Zeme.

Na veľkosť tiažového zrýchlenia má vplyv okrem zemepisnej šírky λ aj nadmorská výška h a rozloženie hmoty v zemskej kôre. Z týchto dôvodov bola dohodnutá hodnota normálového tiažového zrýchlenia ktorej veľkosť je:

$$g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Veľkosť tiažového zrýchlenia v ľubovoľnom mieste na Zemi s nadmorskou výškou h a zemepisnou šírkou λ môžeme určiť z Hayfordovho vzťahu:

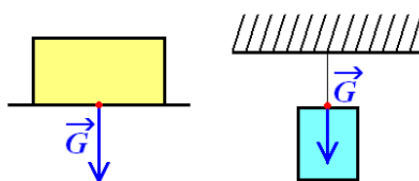
$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \lambda + 0,0000059 \sin^2 2\lambda) - 0,000001967\{h\} \text{ m.s}^{-2}$
alebo pomocou vzťahu:

$$g = 9,783185 (1 + 0,005278895 \sin^2 \lambda + 0,000023462 \sin^2 \lambda) - 0,000003086\{h\} \text{ m.s}^{-2}$$

Poznámka: Na základnej škole sa používa vzťah $F_g = m g$, ktorý platí však iba približne, ak zanedbáme rotáciu Zeme okolo osi, preto sa na základnej škole hodnoty g zaokrúhľovali a používala sa jednotka $\frac{N}{kg}$. Uvedené priblíženia nám umožnili používať pre tiažové zrýchlenie hodnotu $g = 10 \frac{N}{kg}$.

➤ Tiaž telesa

Ak sa teleso nachádza v tiažovom poli Zeme, Zem naň pôsobí tiažovou silou. V dôsledku toho má teleso istú tiaž, nachádza sa v stave tiaže. Tiaž telesa $\vec{G}$ sa prejavuje ako tlaková sila, ktorou pôsobí teleso na nehybnú vodorovnú podložku, alebo ako ťahová sila, ktorou pôsobí teleso na nehybný zvislý záves. Pôsobisko tiaže telesa leží na dotykovej ploche telesa s podložkou v tzv. geometrickom strede, alebo v pevnom bode závesu. Pôsobisko tiaže telesa neleží na telese.



Tiaž telesa $\vec{G}$ má rovnakú veľkosť a rovnaký smer ako tiažová sila $\vec{F}_G$, ktorou pôsobí Zem na teleso, teda smer tiaže telesa je zvisle nadol a veľkosť tiaže telesa je možné vyjadriť vzťahom:

$$|\vec{G}| = G = F_G = m g$$

Pôsobiská síl $\vec{G}$ a $\vec{F}_g$ však nie sú totožné, pôsobisko tiaže $\vec{G}$ neleží na telese, pôsobisko tiažovej sily leží na telese v ťažisku telesa. Ak sa účinok tiaže telesa neprejavuje, hovoríme, že teleso je v beztiažovom stave.

Dátum merania	Meno a priezvisko	Študijný odbor	Hodnotenie	
Určenie gravitačného zrýchlenia meraním doby kyvu reverzného kyvadla			Teplota	
			Tlak	
			Vlhkosť	

➤ **Teória k meraniu:**

Najpresnejšou nepriamou metódou merania tiažového zrýchlenia je meranie pomocou reverzného kyvadla (Obr. 53). Najjednoduchším typom reverzného kyvadla je kovová tyč s dvoma britmi umiestnenými v osiach otáčania, ktoré sú označené O , O' , ktorých ostrie je obrátené k ťažisku T .



Obrázok 53 Reverzné kyvadlo používané na meranie tiažového zrýchlenia

Poloha ťažiska a tým aj doba kyvu sa môžu meniť posuvným závažím Z . Ak sa závažie Z nachádza v takej vzdialenosti x od konca tyče resp. kyvadla, v ktorej bude mať kyvadlo rovnakú dobu kyvu τ pri kmitavom pohybe okolo osi O a aj okolo osi O' , potom vzdialenosť medzi britmi je označená ako redukovaná dĺžka kyvadla l_R . Rovnakú dobu kyvu by malo matematické kyvadlo dĺžky l_R , preto môžeme pre dobu kyvu použiť vzťah:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l_R}{g}}$$

Matematickou úpravou predchádzajúceho vzťahu a vyjadrením tiažového zrýchlenia dostaneme vzťah:

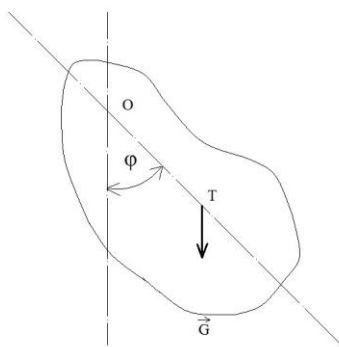
$$g = \frac{\pi^2 l_R}{\tau^2}$$

Pri meraní je potrebné nájsť takú polohu x závažia, pri ktorej je doba kyvu τ rovnaká na oboch osiach. Túto polohu nájdeme metódou grafickej interpolácie. Budeme realizovať meranie doby kyvu pre tri rôzne vzdialenosti x_1 , x_2 a x_3 , pričom vždy odmeriame doby kyvu pri otáčaní okolo osi O a aj osi O' a zakreslíme závislosti doby kyvu τ a τ' od vzdialenosti x . V priesečníku závislostí určíme hodnotu x , ktorú nastavíme na kyvadle a odmeriame doby

kyvu, ktoré by mali byť rovnaké. Nakoniec zmeriame vzdialenosť oboch britov resp. osí otáčania, ktorú potrebujeme k určeniu výslednej hodnoty gravitačného zrýchlenia g .

Pri určovaní gravitačného zrýchlenia meraním doby kyvu reverzného kyvadla vychádzame z nasledovných teoretických predpokladov: Tiažové zrýchlenie g je zrýchlenie, ktoré získajú telesá v zemskom tiažovom poli pri voľnom páde, fyzikálne kyvadlo je teleso, ktoré sa môže voľne otáčať okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom, reverzné kyvadlo je upravené fyzikálne kyvadlo s dvomi možnými vodorovnými osami otáčania, ktoré neprechádzajú ťažiskom a nie sú totožné. Pritom doba kyvu okolo oboch týchto osí je rovnaká.

Doba kyvu fyzikálneho kyvadla sa dá určiť z pohybovej rovnice $M = J \varepsilon$ fyzikálneho kyvadla (Obr. 54), kde M je moment tiaže, J je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os otáčania, ε je uhlové zrýchlenie.



Obrázok 54 Ilustrácia k odvodeniu vzťahov pre dobu kyvu fyzikálneho kyvadla

Po úprave dostaneme vzťah:

$$mg \sin \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Kde a je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania. Pre malé uhly vychýlenia $\varphi \leq 6^\circ$ platí $\sin \varphi \approx \varphi$ a potom predchádzajúca rovnica nadobudne tvar:

$$mga\varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Odtiaľ $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \varphi = 0$, kde označíme $\frac{mga}{J} = \omega^2$. Toto je pohybová rovnica harmonického pohybu, ktorej riešenie má tvar $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + a)$, φ_0 je amplitúda, a fázová konštanta a ω uhlová frekvencia. Potom pre periódu a dobu kmitu a kyvu (kyv = 1/2 kmitu) fyzikálneho kyvadla platí:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{\bar{J}}{mga}$$

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \frac{\bar{J}}{mga}$$

Aby sa nemusel merať moment zotrvačnosti J a vzdialenosť osi od ťažiska a , bol zavedený pojem *redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla* l_R , ktorá je rovnaká, ako dĺžka

matematického kyvadla l , ktoré je tvorené hmotným bodom upevneným na nehmotnom závесе. Dobu kyvu matematického kyvadla vyjadruje vzťah:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ak predpokladáme, že $l = l_R$, tak z predchádzajúceho odvodenia vyplýva rovnosť:

$$\pi \sqrt{\frac{l_R}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

Odtiaľ vyjadríme redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla:

$$l_R = \frac{J}{m a}$$

Redukovanú dĺžku určíme tak, že experimentálne nájdeme k danej osi O kyvadla os O' na opačnej strane, okolo ktorej bude kývať kyvadlo s rovnakou dobou kyvu (Obr. 55). Potom pre doby kyvu musí platiť:

$$\sqrt{\frac{J}{mga}} = \sqrt{\frac{J'}{mga'}}$$

Podľa Steinerovej vety platí:

$$\frac{J^* + ma^2}{a} = \frac{J^* + ma'^2}{a'}$$

Riešením dostaneme vzťah:

$$a' = \frac{J^*}{m a}$$

Potom, vzdialenosť osí O a O' môžeme vyjadriť vzťahom:

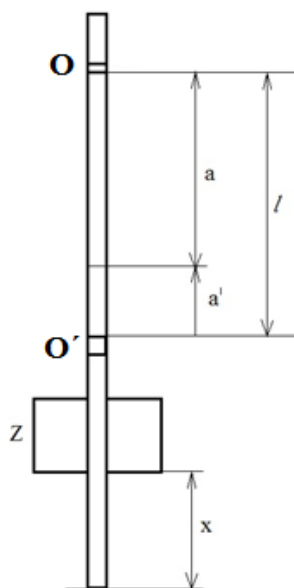
$$a + a' = a + \frac{J^*}{ma} = \frac{ma^2 + J^*}{ma} = \frac{J}{ma} = l_R$$

Pre dobu kyvu reverzného kyvadla potom platí:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l_R}{g}}$$

Zo vzťahu pre dobu kyvu môžeme vyjadriť tiažové zrýchlenie reverzného kyvadla v tvare:

$$g = \frac{\pi^2 l_R}{\tau^2}$$



Obrázok 55 Grafické znázornenie reverzného kyvadla a charakteristických rozmerov

➤ **Úlohy:**

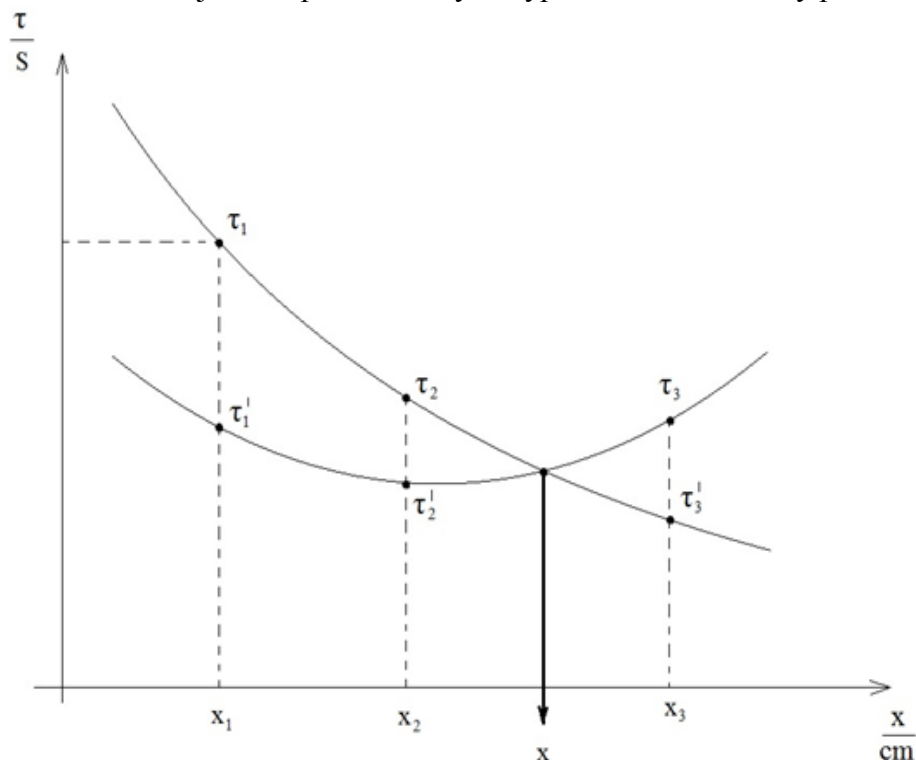
1. Znázorníte graficky závislosť dôb kyvu okolo obidvoch osí od vzdialenosti závažia od konca kyvadla.
2. Určíte tiažové zrýchlenie g .
3. Určíte krajnú chybu hodnoty tiažového zrýchlenia pomocou vzťahu pre výpočet chyby nepriamych meraní.

➤ **Pomôcky:** reverzné kyvadlo, oceľové posuvné meradlo, milimetrový papier, stopky

➤ **Postup:**

1. Posúvateľné závažie posunieme do polohy x_1 od konca tyče. Najskôr zmeriame dobu päťdesiatich kyvov $50\tau_1$ a následne určíme dobu jedného kyvu τ_1 . Údaje zapíšeme do tabuľky.
2. Kyvadlo otočíme a zavesíme za brit, ktorým prechádza os O' a znovu zmeriame dobu päťdesiatich kyvov $50\tau_1'$ a následne určíme dobu jedného kyvu τ_1' . Údaje zapíšeme do tabuľky.
3. Postup z bodov 1 a 2 zopakujeme pri ďalších dvoch polohách závažia x_2 a x_3 a odmeriame hodnoty $50\tau_2$, $50\tau_2'$, $50\tau_3$ a $50\tau_3'$, z ktorých následne určíme τ_2 , τ_2' , τ_3 a τ_3' . Všetky tieto údaje zapíšeme do tabuľky.
4. Dvojice dôb kyvu (τ, τ') znázorníme na grafe. Postupujeme tak, že si zvolíme začiatok súradnicovej sústavy a na os x-ovú nanášame hodnoty vzdialeností x_1 , x_2 a x_3 . Na os y-ovú nanášame hodnoty τ a τ' , ktoré sú pre jednotlivé vzdialenosti x uvedené v tabuľke. Nakoniec pospájame body podľa nižšie uvedeného obrázka (Obr. 56).
5. Dostaneme dve krivky, ktorých priesečník udáva takú vzdialenosť x závažia od konca tyče, pri ktorej doby kyvu okolo obidvoch osí O , O' sú rovnaké $\tau = \tau'$.
6. Závažie umiestnime do polohy x (odčítanej z grafu) a vykonáme meranie doby kyvu τ okolo osi O postupnou metódou, tzn. odčítame koniec každého piateho kyvu tzn. údaj zo stopiek pri 5. kyve, 10. kyve, 15. kyve, ... až 50. kyve. Meraním získame do tabuľky hodnoty, ktoré zapisujeme do stĺpca tabuľky označeného $k 5 \tau$.
7. Pri spracovaní nameraných hodnôt postupujeme tak, že zapíšeme do 1. riadku tabuľky v stĺpci 5τ dobu trvania prvých piatich kyvov. Potom odčítame od doby trvania 10 kyvov dobu trvania 5 kyvov, od doby trvania 15 kyvov dobu trvania 10 kyvov atď. Potom každý číselný údaj v stĺpci označenom 5τ vydělíme počtom kyvov 5

a dostaneme údaje do stĺpca τ , z ktorých vypočítame aritmetický priemer $\bar{\tau}$.



Obrázok 56 Závislosť doby kyvu vzhľadom na os O a O' od vzdialenosti x

8. Kyvadlo otočíme a zavesíme za brit, ktorým prechádza os O' a znovu postupnou metódou, ktorá je podrobne popísaná v predchádzajúcich bodoch zistíme dobu kyvu τ' a následne vypočítame aritmetický priemer $\bar{\tau}'$.
9. Z oboch priemerných dôb kyvu určíme ich aritmetický priemer $\bar{\tau}^*$ a vypočítame absolútne krajné chyby $\bar{\kappa}(\tau)$, $\bar{\kappa}(\tau')$, z ktorých tiež určíme priemernú hodnotu krajnej chyby $\bar{\kappa}(\tau^*)$.
10. Zmeriame 10 krát vzdialenosť osí otáčania tzv. britov označenú v teoretickej časti ako redukovaná dĺžka l_R . Určíme aritmetický priemer $\bar{l}_R$ a vypočítame krajnú absolútnu chybu $\bar{\kappa}(l_R)$.
11. Zo známej hodnoty doby kyvu reverzného kyvadla $\bar{\tau}^*$ a hodnoty redukovanej dĺžky l_R vypočítame tiažové zrýchlenie.
12. Nakoniec vypočítame absolútnu krajnú chybu aritmetického priemeru pre g označenú ako $\bar{\kappa}(g)$, pričom aplikujeme zodpovedajúci postup pre výpočet chyby nepriamych meraní.

➤ **Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:**

n	x (cm)	50τ (s)	τ (s)	$50 \tau'$ (s)	τ' (s)
1					
2					
3					

n	k 5 τ (s)	5 τ (s)	τ (s)	k 5 τ' (s)	5 τ' (s)	τ' (s)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
			$\bar{\tau} =$			$\bar{\tau}' =$

➤ **Spracovanie nameraných hodnôt:**

Porovnajte priemerné doby kyvov $\bar{\tau}$ a $\bar{\tau}'$ a vyjadrite aritmetický priemer výsledkov $\bar{\tau}^*$:

.....
.....
.....

Vypočítajte absolútne krajné chyby aritmetického priemeru $\bar{\kappa}(\tau)$ pre dobu kyvu $\bar{\tau}$ a $\bar{\kappa}(\tau')$ pre dobu kyvu $\bar{\tau}'$. Určte priemernú hodnotu chyby $\bar{\kappa}(\tau^*)$:

$\bar{\kappa}(\tau)$

$\bar{\kappa}(\tau')$

$\bar{\kappa}(\tau^*)$

Vypočítajte aritmetický priemer a krajnú absolútnu chybu aritmetického priemeru pre redukovanú dĺžku:

$\bar{l}_R$

$\bar{\kappa}(l_R)$

.....

Vypočítajte gravitačné zrýchlenie g (posledný vzťah v teoretickej časti úlohy), pri výpočte použite hodnoty $\bar{l}_R$ a $\bar{\tau}^*$:

$g =$

.....

č. m.	l_R (cm)	$\Delta_+(l_R)$ (cm)	$\Delta_-(l_R)$ (cm)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
Σ	$\Sigma l_R =$	$\Sigma \Delta_+ =$	$\Sigma \Delta_- =$
	$\bar{l}_R =$		

Vypočítajte parciálne derivácie vzťahu pre gravitačné zrýchlenie g podľa τ a l_R a dosad'te za jednotlivé veličiny vystupujúce vo vzťahoch ich aritmetické primery (výsledok parciálnej derivácie bude po dosadení číselná hodnota).

$$\frac{\partial g}{\partial l_R} = \frac{\pi^2 \tau^2 - \pi^2 l_R 0}{\tau^4} = \frac{\pi^2}{\tau^2} \dots\dots\dots$$

.....

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{0 \tau^2 - \pi^2 l_R 2\tau}{\tau^4} = -\frac{2 \pi^2 l_R}{\tau^3} \dots\dots\dots$$

.....

Všetky vypočítané chyby merania a hodnoty parciálnych derivácií dosad'te do vzťahu pre krajnú absolútnu chybu nepriamych meraní a výsledok zaokrúhlite podľa známych pravidiel.

$$\bar{\kappa}(g) = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \tau}\right)^2 \bar{\kappa}^2(\tau^*) + \left(\frac{\partial g}{\partial l_R}\right)^2 \bar{\kappa}^2(l_R)} = \dots\dots\dots$$

.....

➤ **Záver:**

1. Zapište výsledky merania v tvare skutočných hodnôt pre všetky fyzikálne veličiny, ku ktorým boli vypočítané chyby merania.

.....

.....

.....

.....

2. Porovnajte vypočítanú hodnotu tiažového zrýchlenia a tabuľkovú hodnotu tiažového zrýchlenia zodpovedajúcu našej zemepisnej šírke. Ak sa hodnoty výraznejšie líšia zistite, kde by sa dala lokalizovať oblasť s Vami zistenou hodnotou g .

.....

.....

.....

3. Uveďte zdroje chýb merania a popíšte podrobne ich príčiny.

.....

.....

.....

4. Akým iným ako reverzným kyvadlom môžeme určiť gravitačné zrýchlenie.

.....

.....

➤ **Graf – názov:**

