

7.2 Návod na laboratórne meranie č.2

Meranie momentu zotrvačnosti

Uvažujme o hmotnom bode s hmotnosťou m , ktorý sa otáča okolo osi O uhlovou rýchlosťou ω . Nech vzdialenosť hmotného bodu od osi otáčania je r a obvodová rýchlosť hmotného bodu pri otáčaní okolo osi nech je v . Potom moment zotrvačnosti hmotného bodu definujeme ako súčin jeho hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti hmotného bodu od osi otáčania.

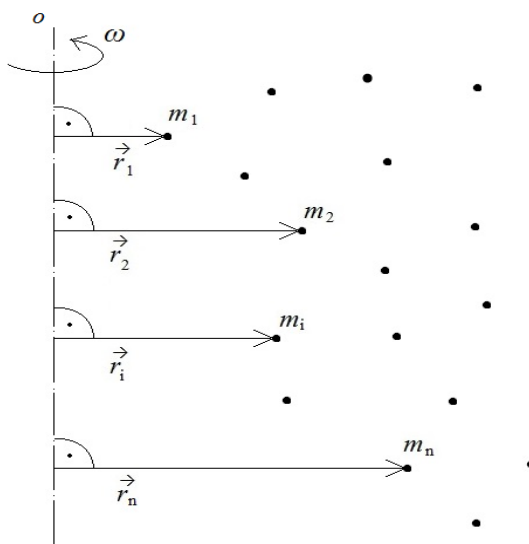
$$J = mr^2$$

Jednotkou momentu zotrvačnosti je $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

➤ *Moment zotrvačnosti sústavy n diskretných hmotných bodov a reálneho telesa*

Uvažujme o modeli sústavy n diskretných hmotných bodov (Obr. 47), ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi otáčania. Nech m_i je hmotnosť i -teho hmotného bodu a nech poloha i -teho hmotného bodu vzhľadom na os otáčania je daná polohovým vektorom $\vec{r}_i$, ktorého veľkosť r_i reprezentuje vzdialenosť i -teho hmotného bodu od osi otáčania. Potom pre moment zotrvačnosti i -teho hmotného bodu platí:

$$J_i = m_i r_i^2$$

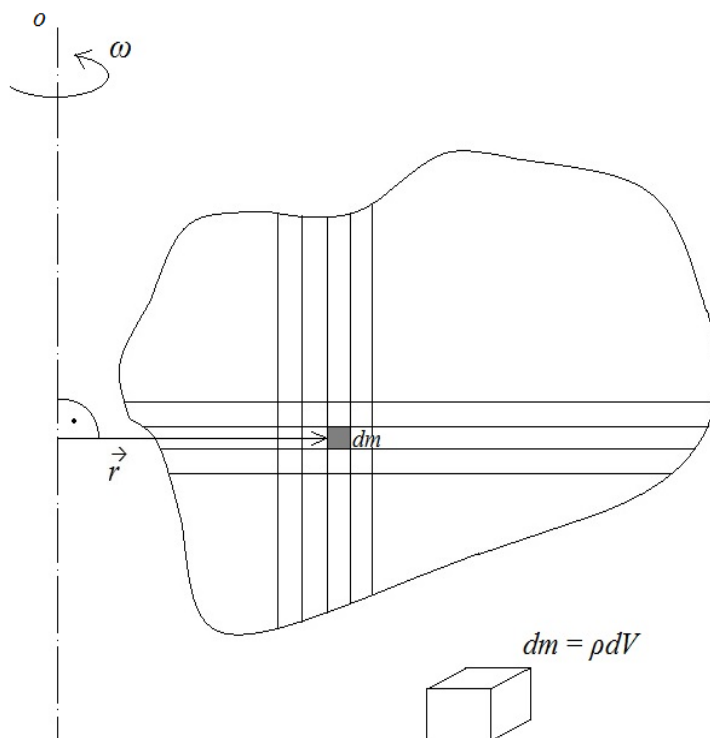


Obrázok 47 Moment zotrvačnosti sústavy n – diskretných hmotných bodov

Moment zotrvačnosti pre sústavu n – diskretných hmotných bodov vypočítame ako súčet momentov zotrvačnosti od jednotlivých hmotných bodov:

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Ak uvažujeme o reálnom telese, v ktorom je hmota rozložená spojitě, tak v predchádzajúcom vzťahu pre moment zotrvačnosti nahradíme sumy integrálom.



Obrázok 48 Moment zotrvačnosti reálneho telesa

Pre reálne teleso (Obr. 48), ktoré má hustotu ρ , ktorá je definovaná ako podiel elementárnej hmotnosti dm a elementárneho objemu dV vzťahom:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

môžeme moment zotrvačnosti definovať vzťahom:

$$J = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

Vzťahy pre výpočet momentov zotrvačnosti vybraných telies môžeme nájsť v matematicko-fyzikálnych tabuľkách, alebo ich môžeme odvodiť pomocou vzťahov platných pre reálne teleso. Ukážky niektorých odvodení sú zaradené v ďalšom texte v rámci riešených príkladov. Pri uvedených vzťahoch je vždy dôležité vedieť, kadiaľ prechádza os otáčania, okolo ktorej sa teleso otáča. V matematicko-fyzikálnych tabuľkách sú najčastejšie uvádzané vzťahy pre výpočet momentu zotrvačnosti, ak os otáčania prechádza ťažiskom telesa.

Pre moment zotrvačnosti gule s polomerom r , kruhovej dosky zanedbateľnej hrúbky s polomerom r a tyče dĺžky l , ak os otáčania prechádza ťažiskom platia vzťahy:

$$\text{guľa: } J = \frac{2}{5} m r^2$$

$$\text{kruhová doska: } J = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\text{tyč: } J = \frac{1}{12} m l^2$$

➤ *Steinerova veta*

Ak os otáčania neprechádza ťažiskom telesa, tak môžeme využiť na výpočet momentu zotrvačnosti J tzv. *Steinerovu vetu*, ktorá umožňuje pri známom momente zotrvačnosti telesa J^* vzhľadom na os otáčania, ktorá prechádza ťažiskom telesa jeho výpočet:

$$J = J^* + m a^2$$

kde m je hmotnosť telesa a a je vzdialenosť osi otáčania, ktorá neprechádza ťažiskom od osi otáčania, ktorá prechádza ťažiskom telesa.

Dátum merania	Meno a priezvisko	Študijný odbor	Hodnotenie	
Určenie momentu zotrvačnosti pomocou torzného kyvadla			Teplota	
			Tlak	
			Vlhkosť	

➤ **Teória k meraniu:**

Fyzikálne kyvadlo je každé teleso, ktoré sa môže otáčať bez trenia okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom. Jeho pohyb sa riadi pohybovou rovnicou, ktorá vyjadruje otáčanie tohto telesa okolo osi. Moment sily vzhľadom na os je vektorová veličina. Telesá sa vždy snažia zachovávať svoj pohybový stav. Túto schopnosť telies charakterizujeme zotrvačnou hmotnosťou pri pohybe posuvnom a momentom zotrvačnosti pri pohybe rotačnom. Moment zotrvačnosti má tiež svoj pôvod v zotrvačnej hmotnosti, ale navyše sa tu uplatní ešte jej rozloženie okolo osi rotácie.

Pri meraní momentu zotrvačnosti môžeme vychádzať zo všeobecného vzťahu $J = mr^2$, kde m je hmotnosť a r je vzdialenosť hmotného bodu od osi rotácie. Moment zotrvačnosti telesa so spojitou rozloženou hmotnosťou, ktoré rotuje okolo osi platí:

$$J = \int r^2 dm$$

Pre každé teleso je možné pomocou predchádzajúceho vzťahu určiť moment zotrvačnosti. Napríklad pre tenkú kruhovú obruč hmotnosti m_0 s polomerom r_0 rotujúcu okolo osi prechádzajúcej ťažiskom platí:

$$J_0 = m_0 r_0^2$$



Obrázok 49 Zariadenie pre meranie momentu zotrvačnosti kruhovej dosky

Pre homogénnu kruhovú dosku hmotnosti m_d s polomerom r_d platí:

$$J_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2$$

Experimentálne možno moment zotrvačnosti určiť napríklad meraním doby kyvu torzného kyvadla (Obr. 49). Teleso zavesíme na oceľový drôt a torzne rozkývame (tak, že sa kruhová doska otáča vo vodorovnej rovine), teda meriame dobu kyvu torzne rozkývaného telesa. Ak t je doba jeho kyvu, potom platí:

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

kde D je direkčný moment torzie, ktorý závisí od rozmerov a vlastností použitého drôtu (je to moment pôsobiaci na teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o 1 rad). Odtiaľto pre dosku bude platiť:

$$J_d = \frac{Dt^2}{\pi^2}$$

Ak priložíme na kovovú kruhovú dosku kruhovú obruč hmotnosti m_0 a polomerom r_0 tak, aby drôt prechádzal stredom obruče a bol kolmý na jej rovinu, dostaneme teleso, ktorého moment zotrvačnosti bude súčtom momentov zotrvačnosti kruhovej dosky a kruhovej obruče $J_d + J_0$.

Doba kyvu t_1 potom bude:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{J_d + J_0}{D}} \Rightarrow J_d + J_0 = \frac{Dt_1^2}{\pi^2}$$

Z rovnice $J_d = \frac{Dt^2}{\pi^2}$ určíme D a dosadíme do rovnice $J_d + J_0 = \frac{Dt_1^2}{\pi^2}$

$$J_d = \frac{Dt^2}{\pi^2} \text{ , } J_d + J_0 = \frac{J_d \pi^2 t_1^2}{t^2 \pi^2} \Rightarrow J_0 = J_d \left(\frac{t_1^2}{t^2} - 1 \right)$$

po úprave dostaneme:

$$J_d = \frac{J_o}{\frac{t_1^2}{t^2} - 1}$$

Experiment usporiadajme tak, že upevníme na dolný koniec tyče vhodné teleso (zotrvačník), ktorého moment zotrvačnosti J_T voči pozdĺžnej osi tyče je mnohonásobne väčší ako moment zotrvačnosti samotnej tyče. Tak dostaneme dynamickú kmitavú sústavu, ktorá je schopná konať torzné kmity okolo torznej osi – torzné kyvadlo. Pri otáčaní telesa okolo torznej osi pôsobí deformovaná tyč na teleso momentom sily opačného znamienka. Potom pohybová rovnica rotačného pohybu okolo torznej osi bude:

$$J_T \varepsilon = -M$$

kde J_T je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, kde ε je uhlové zrýchlenie. Po dosadení za M a po úprave dostaneme pohybovú rovnica v tvare:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T}\varphi = 0$$

➤ **Úlohy:**

1. Určite výpočtom z rozmerov moment zotrvačnosti kruhovej dosky a obruče.
2. Určite moment zotrvačnosti kruhovej dosky experimentálne a výsledok porovnajte s hodnotou určenou výpočtom.

➤ **Pomôcky:** kruhová kovová doska, silná kovová obruč, oceľový drôt, závesy pre drôt, posuvné meradlo, stopky

➤ **Postup:**

1. Najprv si zapíšeme hmotnosť dosky m_d a hmotnosť obruče m_o . Na niekoľkých (v tomto prípade desiatich) miestach pomocou posuvného meradla odmeriame priemer $2r_d$ dosky a z týchto údajov vypočítame polomer r_d , pomocou ktorého určíme J_d . Desiatkrát zmeriame vonkajší priemer obruče a hodnotu vydáme 2, čím dostaneme vonkajší polomer obruče r_{o1} , potom postup zopakujeme pre vnútorný priemer obruče a určíme vnútorný polomer obruče r_{o2} . Všetky odmerané a zistené údaje si zapisujeme do tabuľky. Polomer r_o obruče vypočítajte ako aritmetický priemer r_{o1} a r_{o2} . Ak poznáme polomer r_o a hmotnosť obruče m_o , tak môžeme vypočítať moment zotrvačnosti obruče J_o . V rámci výpočtov určíme strednú absolútnu chybu r_d a r_o a strednú absolútnu chybu momentov zotrvačnosti J_d a J_o .
2. Dosku upevníme do závesu, mierne ju torzne rozkývame a určíme dobu kyvu z priemeru desaťkrát opakovaného merania času aspoň 20 t . Meranie času začíname a končíme vždy v okamihu, keď má doska najväčšiu rýchlosť (ako pomôcka nám môže slúžiť značka na kruhovej doske, ktorá bude reprezentovať rovnovážnu polohu a statický ukazovateľ rovnovážnej polohy, napríklad vztýčená ceruzka). Pri vychýlení dosky z rovnovážnej polohy bude rýchlosť dosky maximálna pri prechode značky na kruhovej doske okolo statického ukazovateľa). Pri výpočtoch určíme strednú absolútnu chybu doby kyvu t .
3. Na dosku položíme obruč tak, aby sa jej stred kryl so stredom dosky a určíme novú dobu kyvu t_1 predtým uvedeným spôsobom, pričom meranie opakujeme 10 krát a k nameraným hodnotám vypočítame aritmetický priemer a strednú absolútnu chybu pre dobu kyvu t_1 .
4. Z nameraných hodnôt vypočítame J_d a určíme strednú absolútnu chybu. Experimentálne získaný výsledok porovnáme s výsledkom získaným výpočtom z rozmerov dosiek.

➤ **Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:**

n	r_{01} (mm)	r_{02} (mm)	r_0 (mm)	Δr_0 (mm)	Δr_0^2 (mm ²)	$J_0 \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_0 \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_0^2 \cdot 10^{-6}$ (kg ² .m ⁴)
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
6.								
7.								
8.								
9.								
10.								
			$\bar{r}_0 =$	$\sum \Delta r_0 =$	$\sum \Delta r_0^2 =$	$\bar{J}_0 =$	$\sum \Delta J_0 =$	$\sum \Delta J_0^2 =$
n	r_d (mm)	Δr_d (mm)	Δr_d^2 (mm ²)	$J_d \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_d \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_d^2 \cdot 10^{-6}$ (kg ² .m ⁴)	m_o (kg)	m_d (kg)
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
6.								
7.								
8.								
9.								
10.								
		$\sum \Delta r_d =$	$\sum \Delta r_d^2 =$	$\bar{J}_d =$	$\sum \Delta J_d =$	$\sum \Delta J_d^2 =$		

➤ **Spracovanie nameraných hodnôt:**

Určte výpočtom stredný polomer obruče (vzorový výpočet pre riadok tabuľky):

$$r_0 = \frac{r_{01} + r_{02}}{2} \dots\dots\dots$$

.....

.....

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru pre stredný polomer obruče:

$$\bar{\delta}(r_0) = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta r_0^2}{n(n-1)}}$$

.....

.....

.....

Výpočet momentu zotrvačnosti obruče (vzorový výpočet pre riadok tabuľky):

$$J_0 = m_0 r_0^2$$

.....

.....

.....

n	$J_0 \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	20t (s)	t (s)	Δt (s)	Δt^2 (s ²)	20t ₁ (s)	t ₁ (s)	Δt_1 (s)	Δt_1^2 (s ²)	$J_d \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_d \cdot 10^{-3}$ (kg.m ²)	$\Delta J_d^2 \cdot 10^{-6}$ (kg ² .m ⁴)
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
10.												
	$\bar{J}_0 =$		$\bar{t} =$	$\sum \Delta t =$	$\sum \Delta t^2 =$		$\bar{t}_1 =$	$\sum \Delta t_1 =$	$\sum \Delta t_1^2 =$	$\bar{J}_d =$	$\sum \Delta J_d =$	$\sum \Delta J_d^2 =$

Výpočet strednej absolútnej chyby aritmetického priemeru pre moment zotrvačnosti obruče:

$$\bar{\delta}(J_0) = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta J_0^2}{n(n-1)}} \dots\dots\dots$$

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru kruhovej dosky:

$$\bar{\delta}(r_d) = \sqrt{\frac{\sum \Delta r_d^2}{n(n-1)}} \dots\dots\dots$$

Výpočet momentu zotrvačnosti kruhovej dosky (vzorový výpočet pre riadok tabuľky):

$$J_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2 \dots\dots\dots$$

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru pre moment zotrvačnosti kruhovej dosky:

$$\bar{\delta}(J_d) = \sqrt{\frac{\sum \Delta J_d^2}{n(n-1)}} \dots\dots\dots$$

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru pre dobu kyvu kruhovej dosky:

$$\bar{\delta}(t) = \sqrt{\frac{\sum \Delta t^2}{n(n-1)}} \dots\dots\dots$$

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru pre dobu kyvu obruče:

$$\bar{\delta}(t_1) = \sqrt{\frac{\sum \Delta t_1^2}{n(n-1)}} \dots\dots\dots$$

Výpočet momentu zotrvačnosti kruhovej dosky určeného experimentálne (vzorový výpočet pre riadok tabuľky):

$$J_d = \frac{J_0}{\frac{t_1^2}{t^2} - 1} \dots\dots\dots$$

Stredná absolútna chyba aritmetického priemeru pre moment zotrvačnosti kuhovej dosky určený experimentálne:

$$\bar{\delta}(J_d) = \sqrt{\frac{\sum \Delta J_d^2}{n(n-1)}}$$

➤ **Záver :**

1. Zapište výsledky merania v tvare skutočných hodnôt pre všetky fyzikálne veličiny, ku ktorým boli vypočítané chyby merania.

Zhodnoťte presnosť určenia momentu zotrvačnosti meraním rozmerov a ich následným výpočtom a porovnajte ju s presnosťou určenia momentu zotrvačnosti meraním doby kyvu torzného kyvadla.

2. Uveďte zdroje chýb merania a popíšte podrobne ich príčiny.

3. Uveďte jednotku momentu zotrvačnosti v sústave SI a napíšte vzťahy pre výpočet momentov zotrvačnosti najznámejších telies.